Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico–Químicas y Naturales de Granada

Con Geometría de Lorentz, el Universo en una hoja de papel

Discurso leído en el acto de su recepción

como académico numerario por el

Ilmo. Sr. D. Alfonso Romero Sarabia

Granada, 2014

Academia de Ciencias Matemáticas,

Físico–Químicas y Naturales de Granada

CON GEOMETRÍA DE LORENTZ, EL UNIVERSO EN UNA HOJA DE PAPEL

DISCURSO LEÍDO EN EL ACTO DE SU RECEPCIÓN

COMO ACADÉMICO NUMERARIO POR EL

ILMO. SR. D.

ALFONSO ROMERO SARABIA

GRANADA, 2014

Con Geometría de Lorentz, el Universo en una hoja de papel

Que nadie que no sepa Geometría entre en mi casa

Platón (siglo III a. J. C.)

Hasta aquí he intentado que cualquier persona pudiera entender mis escritos; sin embargo, temo que este tratado no podrá ser leído sino por aquellos que ya tienen conocimiento de lo que se expone en los estudios de Geometría...

René Descartes, (1637)
advertencia antes de la Geometría
en su Discurso del Método

El conocimiento matemático que ha hecho posible establecer la Teoría General de la Relatividad se lo debemos a las investigaciones en Geometría de Gauss y Riemann

Albert Einstein, (1922)
The meaning of Relativity

Hoy en día es imposible acceder al maravilloso y siempre efervescente mundo de la Relatividad General sin un conocimiento profundo en Geometría de Lorentz

Con Geometría de Lorentz, el Universo en una hoja de papel

Alfonso Romero Sarabia

Excmo. Sr. Presidente de la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico–Químicas y Naturales
Excmos. e Ilmos. Sra. y Sres. Académicos
Sras. y Sres.

Hace ya algunos años, un joven doctor en Matemáticas por la Universidad católica de Lovaina estuvo formándose conmigo durante un curso completo. Recuerdo cómo decía que la mayor insatisfacción de su trabajo era el no poder explicar a sus amigos en qué consistía éste. De manera que cuando volvía a Bélgica por vacaciones y se encontraba con ellos, él respondía con comentarios sobre el clima o alguna costumbre típica de España a las experiencias laborales de un abogado y de un médico. Un día, se me ocurrió sugerir que les comentase someramente a sus amigos alguna interpretación física de la geometría que estudiaba conmigo, fuera o no específica de los resultados que habíamos obtenido. Esta estrategia, desarrollada con un esfuerzo extra de mi estudiante, tuvo un éxito total. El motivo radicó, sin duda, en que cuestiones como la expansión del Universo desde una gran explosión inicial o el canibalismo extremo de los agujeros negros son ya, en gran medida, parte del lenguaje común, gracias a las obras de divulgación de varios científicos muy conocidos, novelas y, sobre todo, a películas de ciencia ficción.

Esta "soledad e incomprensión" que sentimos los matemáticos se debe, por un lado, a una falta de comunicación, en lenguaje y términos adecuados, del matemático con su entorno y, por otro, al poco interés que muestra la sociedad por nuestro trabajo. De lo primero tenemos claramente culpa los matemáticos que no hemos sabido desarrollar los canales adecuados de comunicación con la sociedad, en paralelo con el avance del conocimiento en nuestra área (no se puede valorar aquello que no se conoce ni siquiera someramente). Quizá un motivo de la segunda razón sea la poca importancia que concede la sociedad actual a todo aquello que no conduzca a una recompensa grande e inmediata.

De vez en cuando, algún medio de comunicación se hace eco de una noticia que nos aleja, aunque no sea nada más que instantáneamente, de la cruda realidad. Parece que las matemáticas solo son noticia si abren nuevos caminos de esperanza en otras áreas de conocimiento y, más aún, si quien protagoniza la noticia no es un matemático. Así ocurrió con el artículo "Matemáticas contra el cáncer" que el prestigioso oncólogo Dr. Carlos Cordón-Cardo, del Mount Sinai Hospital de New York, publicó en "La Vanguardia" el día 1 de marzo de 2009 [10]. En él, el autor asegura que *el cáncer es una enfermedad de células madre que hacen lo que no deben y que las matemáticas pueden ayudar a combatirla.* Resulta curioso que, unos días antes, yo había participado en una comisión para la provisión de una plaza de catedrático de matemáticas en la Universidad Jaume I de Castellón. El candidato que la obtuvo era un joven geómetra, especializado en estereología, [1] que colabora con un equipo de oncólogos del hospital La Fe de Valencia. Fruto de esta colaboración ha sido el uso, con éxito, de técnicas geométricas para la planificación del tratamiento de tumores que requieren una delineación de la próstata.

Desgraciadamente, el día a día presenta una cara totalmente diferente. Una vez alguien me preguntó por mi profesión; le dije que trabajaba en la Facultad de Ciencias y añadí que era matemático. Respondió que cómo estaba yo entonces en la Facultad de Ciencias si no era un científico. Le repliqué que yo, además de mi labor docente, hacía investigación en matemáticas; extrañado me preguntó si en matemáticas quedaba ya algo por descubrir. Tras respirar hondo, le dije que naturalmente que sí, pero que los descubrimientos que se hacen ahora obedecen a problemas alejados de las matemáticas de la vida cotidiana. A fin de poner término a una conversación entre dos personas que parecíamos pertenecer a mundos distintos, le dije que, además, las matemáticas no solo son parte de la ciencia, sino de la cultura y que eso había sido así durante toda la historia de la humanidad. De hecho, ya en la antigua Grecia, Euclides (325-265 a. J. C. ca.) y su escuela gozaban de una alta consideración entre sus coetáneos; al mismo nivel de la clase privilegiada de los filósofos. Aún hoy, el oficio de ma-

[1]Conjunto de métodos para la exploración del espacio tridimensional a partir del conocimiento de secciones bidimensionales o proyecciones sobre planos.

temático está considerado, en otras sociedades, como uno de los más honorables y necesarios para el desarrollo tecnológico y cultural. Desafortunadamente, esta anécdota toma otro cariz cuando, desde algunos círculos literarios o humanistas, a los científicos se nos tacha de incultos. Este hecho no es nuevo y ha propiciado reacciones no siempre libres de polémica. El 7 de mayo de 1959, el físico y novelista inglés, C. P. Snow (1905-1980), impartió, en la Senate House de Cambridge una conferencia titulada *Las dos culturas*, donde se quejaba de la ruptura de comunicación entre las ciencias y las humanidades y, como consecuencia, de la creciente falta de interdisciplinariedad, afirmando que, para él, esta situación perjudicaba incluso la resolución de los problemas mundiales. Mientras que algunos humanistas califican como especialistas ignorantes a los científicos, una parte de estos cree que los intelectuales literarios carecen por completo de visión anticipadora, anhelosos de reducir tanto el arte como el pensamiento al momento existencial. Que un científico no haya leído nunca una obra importante de la literatura no es más abominable que un humanista no sepa nada sobre la ley de gravitación universal de Newton [49].

He aquí un gran reto para la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada: el acercar a nuestra sociedad la labor docente y la investigación de los científicos, en especial de los matemáticos. No se trataría de obtener de la sociedad un reconocimiento explícito de nuestro trabajo, que ciertamente hacemos con gusto y por vocación. Más bien de que la sociedad sea consciente de la importancia que tiene la Ciencia en general; y que además se sienta orgullosa de que ésta nuestra casa, la Facultad de Ciencias, sea puntera a nivel internacional, en muchos ámbitos de la investigación y de la docencia. En particular, de que la creación matemática no tiene topes ni horarios; que las buenas ideas aparecen, si lo hacen, tras mucho esfuerzo, y que tienen para nosotros una indudable recompensa: la satisfacción por el trabajo bien hecho y la ilusión de que colaboramos a que nuestro mundo sea cada vez más justo, más amable y mejor lugar en el que vivir.

1 Un largo camino recorrido

Tres siglos a. J. C. ya se hablaba de geometría en Grecia (para los griegos de ese tiempo, geometría y matemáticas eran sinónimos). La geometría tenía entonces una gran carga lógica y estaba desprovista de toda motivación práctica. La solidez de la geometría euclídea ha quedado patente al permanecer los *Elementos*[1] de Euclides [17] como texto de estudio obligado en la mayoría de las universidades occidentales hasta el siglo XIX. La geometría euclídea era muy árida de estudiar, carente de toda intuición y sin un camino real como el que demandó el rey Ptolomeo. Las proposiciones de los Elementos se demostraban mediante reglas lógicas y, por tanto, cada demostración era esencialmente única (e independiente del que la realizaba).

Tuvo que llegar R. Descartes (1596-1650), con su idea de introducir ecuaciones para el estudio de las figuras [12] para que la geometría de Euclides fuese más ágil en el planteamiento y resolución de problemas y mucho más accesible a los estudiantes (quizá éste era el “camino real” que Euclides no supo dar al rey

[1] La versión de Teón de Alejandría (335-405 ca.) de los Elementos de Euclides, escrita al parecer con la ayuda de su hija Hipatia (quizá la primera mujer matemática de la historia), fue el texto griego más antiguo de los Elementos conocido, hasta que fue descubierto en el Vaticano a finales del siglo XIX una versión anterior.

Ptolomeo). ¿Cómo llegó Descartes a su descubrimiento? Por supuesto, sería consecuencia de complejos y variados procesos en su mente, en los que sin duda influirían su actitud personal ante las matemáticas de la época y su excepcional formación filosófica. Descartes concibió su geometría como un método que ayudaría a organizar la "ciencia absoluta" (la que explicaría el porqué de todas las cosas). Sin ningún pudor, Descartes afirmaba que la geometría euclídea cansaba su imaginación y que el álgebra, en lugar de educar su mente, la confundía. De manera que Descartes tomó de cada una de estas disciplinas lo que le pareció mejor y el resultado fue su "Geometría Analítica"[2] publicada en 1637 dentro de su famoso "Discurso del Método" [12], como el ensayo "La Geometría".

Uno de sus logros que llamó la atención de los matemáticos de la época fue la prueba de que las secciones cónicas de Apolonio (262-190 a. J. C. ca.) se hallan todas contenidas en un conjunto de ecuaciones cuadráticas. Como las secciones cónicas incluyen las circunferencias de los antiguos astrónomos, las elipses de J. Kepler (1571-1630) y las parábolas de Galileo Galilei (1564-1642), Descartes dio a los físicos una "poderosa herramienta" sin la cual incluso I. Newton (1643-1727) se hubiera visto seriamente limitado. Su fama fue reconocida hasta en ambientes alejados de

[2] P. de Fermat (1601-1665) conocía algunos aspectos de esta geometría antes de su publicación por Descartes, pero Fermat nunca los publicó. Descartes sabía de los escritos de Fermat pero no reconoció su valía. La diferencia entre el punto de vista de Fermat y de Descartes es que aquel comienza con una ecuación algebraica y a continuación describe su geometría, mientras que Descartes parte de una curva y calcula sus ecuaciones como otra propiedad más de la curva.

las matemáticas; por ejemplo, el mismo Voltaire (1694-1778) escribió asombrado: *Descartes ha descubierto el método que permite asignar ecuaciones algebraicas a las curvas.*

El descubrimiento de Descartes también tuvo sus sombras, mayormente debido al mal uso de las coordenadas por muchos de sus entusiastas seguidores. Así, mientras los conceptos de la geometría de Euclides eran meridianamente claros, algunas nociones expresadas en términos de coordenadas, se oscurecieron o incluso se entendieron erróneamente. Simplificando mucho, diríamos que se confundía un concepto con algunas de sus representaciones en coordenadas. Así, ocurría a veces que a una propiedad obtenida mediante una descripción por coordenadas de un objeto geométrico (o parte de él) se le atribuía un contenido geométrico del que carecía, pues esta propiedad no era invariante al cambiar de unas coordenadas a otras. Desgraciadamente, este problema se ha mantenido hasta nuestros días (a modo de ejemplo, es corriente oír a un alumno hablar de "la pendiente de una recta en el plano" como si se tratase de un número que expresara una propiedad geométrica de la recta, cuando esta pendiente varía al cambiar los ejes cartesianos elegidos manteniendo fija una recta dada).

Fue K. F. Gauss (1777-1855) el primero en introducir sistemáticamente coordenadas sobre una región de una superficie regular del espacio euclídeo, para expresar con ellas los elementos geométricos notables de la superficie en el dominio donde estaban definidas las coordenadas. Resulta significativo que Gauss tenía ya 50 años cuando publicó su famoso *Disquisitiones generales circa superficies curvas* [20] y que, en buena parte, éste presenta influencias de sus trabajos sobre Geodesia y Cartografía. Además es relativamente corto comparado, por ejemplo, con su libro de Aritmética que tenía 470 páginas. La gran idea de Gauss permitió aplicar el Cálculo Diferencial para funciones de dos variables al estudio de la geometría local de las superficies del espacio euclídeo, poniendo los cimientos de lo que hoy entendemos como Geometría Diferencial. Como en principio proporcionó soportes y aplicaciones geométricas del Cálculo Diferencial e Integral, se conocía a esta disciplina en aquel tiempo como Aplicaciones del Análisis a la Geometría, que es precisamente el título de un libro de G. Monge (1746-1818), geómetra original y maestro inspirador, que podría ser considerado como el primer texto sistemático de Geometría Diferencial [33]. Tal génesis hizo que esta rama de las matemáticas tuviese durante algún tiempo un cierto problema de identificación.

Gauss introdujo la noción de curvatura de una superficie en uno de sus puntos (*mensura curvaturae*). Para ello utilizó la aplicación de la superficie (o de un trozo de ella) en la esfera unidad que le hace corresponder a cada punto un vector normal unitario en dicho punto y comparó el área de un recinto infinitesimalmente pequeño alrededor del punto y el área de su imagen en la esfera [20]. Tras largos cálculos, Gauss llegó a la fórmula que hoy llamamos "ecuación de Gauss", que sorprendió a muchos e incluso a él mismo. De ella, Gauss dedujo su Teorema Egregium (Teorema excepcional): La curvatura es intrínseca, i.e., se puede deducir la curvatura de una superficie en cada uno de sus puntos desde "dentro" de dicha superficie (un ser de dimensión 2 que viviera sobre una superficie podría saber cómo está curvada sin necesidad de conocer qué forma tiene ésta en el espacio euclídeo). Comprobó, en particular, que su definición de curvatura coincidía con la "discutible" noción que previamente había dado L. Euler (1707-1783) usando las curvaturas de ciertas curvas obtenidas como intersección de planos normales a la superficie en un punto [13, Chap. IV]. Es sorprendente, para la mentalidad de la época, la profundidad de las nociones introducidas por Gauss, que le permitieron el estudio de propiedades de las superficies "en sí", lo que supone el comienzo de la geometría intrínseca y con ella de la Geometría de Riemann.

Tanto la escuela de Monge como la de Gauss fueron muy prolíficas. Entre los discípulos de Monge, que fue el fundador de la Escuela Politécnica de París, cabe destacar a P. C. F. Dupin (1784-1873), J. B. Meusnier (1754-1793), M. A. Lancret (1774-1807), B. O. Rodrigues (1795-1851), J. F. Frenet (1816-1900), J. A. Serret (1819-1885), J. L. F. Bertrand (1822-1900), P. O. Bonnet (1819-1892), J. V. Poncelet (1788-1867) (considerado como uno de los fundadores de la *Geometría Proyectiva*), J. Liouville (1809-1882) (fundador de la primera revista dedicada a la investigación matemática: Journal de Mathematiques Pures et Appliquées) y J. G. Darboux (1842-1917), quien utilizó el "triedro móvil" para estudiar propiedades diferenciales de curvas y superficies, y que escribió su famoso tratado *Leçons sur la théorie général des surfaces* [11]. Discípulos de Gauss fueron C. G. J. Jacobi (1804-1851), K. T. W. Weierstrass (1815-1897), E. B. Christoffel (1829-1900), J. Weingarten (1836-1910), D. Codazzi (1824-1873), E. F. A. Minding (1806-1885), G. F. B. Riemann

(1826-1866) y F. C. Klein (1849-1925).

Fue Riemann quien puso, en su famosa memoria [38] las bases para la estructuración y desarrollo de lo que después se llamó (en su honor) *Geometría de Riemann*. En un lenguaje intuitivo y sin demostraciones, Riemann introdujo en 1854 el concepto de "forma cuadrática diferencial" sobre una variedad diferenciable de dimensión arbitraria[3] y generalizó a esta nueva y abstracta situación la noción de curvatura de Gauss. Además, enunció varias relaciones entre la forma cuadrática y la curvatura. En todo el trabajo de Riemann se hace patente su preocupación por las cuestiones fundamentales del desarrollo de las geometrías no euclídeas, y por las relaciones entre la física y la geometría. Es curioso observar que la memoria de Riemann "solo" contiene una fórmula: el tensor de curvatura de una variedad de Riemann con curvatura seccional constante. Mucha gente se sorprendió de la gran intuición geométrica de Riemann. Sin embargo, más tarde se conoció que tal fórmula fue consecuencia de una gran cantidad de cálculos de Riemann que "por elegancia" no incluyó en su escrito original.

La Geometría de Riemann se desarrolló al principio muy lentamente debido a una falta de herramientas adecuadas y su aspecto local tuvo un papel preponderante. De alguna manera recordaba al clásico análisis tensorial sobre el espacio euclídeo tridimensional expresado en coordenadas totalmente generales. Esta situación se mantuvo incluso tras la defunción de J. H. Poincaré (1854-1912). Pero en aquella época, surgieron varios estímu-

[3] La definición de variedad diferenciable tal y como hoy se conoce se debe a H. Weyl (1885-1955) y data de 1913 [53].

los de distinto tipo aunque todos ellos de gran relevancia. Entre los internos señalemos, por ejemplo, la introducción alrededor de 1901 por T. Levi-Civita (1873-1941) en colaboración con su maestro G. Ricci-Curbastro (1853-1925) del "cálculo diferencial absoluto" (propuesto en 1864 por Christoffel (1829-1900)), y que es conocido hoy como "análisis tensorial sobre variedades de Riemann". Originalmente, se le concibió más como una técnica y una forma muy general (y elegante) de establecer teoremas, que como parte de una rama bien definida de las matemáticas. Durante el desarrollo de la Relatividad General, a partir de 1915, el análisis tensorial en variedades y, en particular, la noción de paralelismo de Levi-Civita fue crucial. Este acontecimiento fue quizás el más importante entre los estímulos externos.

En 1872, dieciocho más tarde de la presentación de la tesis de Riemann, acaeció otro hecho de especial relevancia para comprender el estado actual de la geometría. Klein, con solo 23 años obtuvo una plaza en la Universidad de Erlangen. En su conferencia inaugural, el *Programa de Erlangen*, propuso una forma unificada de ver varias geometrías (por ejemplo, euclídea, afín, proyectiva). Esencialmente, Klein asoció a cada geometría un grupo de trasformaciones de manera que las propiedades de las figuras que interesan en esa geometría son las que se conservan en la figura obtenida al aplicar una cualquiera de las trasformaciones del grupo a la figura original. Recíprocamente, la teoría que estudia las propiedades de las figuras que conservan las trasformaciones de un grupo dado se llama "la geometría de este grupo".

En una geometría dada, cada figura se describe mediante un sistema de coordenadas, de manera que esta descripción puede verse como el "nombre" de la figura según el sistema de coordenadas. La confusión de algunos entre ¿cómo se llama? y ¿qué es? quedó entonces zanjada. En efecto, las coordenadas admisibles en cada geometría se obtienen de unas coordenadas que lo sean por la acción del grupo que define la geometría, de manera que una propiedad común a todos los sistemas de coordenadas toma el rango de propiedad geométrica en la geometría definida por ese grupo. Resulta muy sugerente el paralelismo que hay entre el papel de un sistema de coordenadas frente a una figura y un observador frente a un sistema físico [54]. Lo que hace un observador es añadir una coordenada extra: el tiempo que marca su reloj. En efecto, los observadores admisibles en cada teoría física se obtienen de uno que lo es y mediante la acción de un grupo que "define la teoría física", de manera que una propiedad común a todos los observadores admisibles toma el rango de propiedad física en la teoría definida por ese grupo.

En 1886 Klein aceptó una plaza de catedrático en la Universidad de Göttingen. No menos relevante que su Programa de Erlangen fue el hecho de que Klein estableció allí un centro de investigación que fue el modelo de los mejores institutos de investigación matemática en el mundo. Por este centro fueron pasando los mejores matemáticos de la época e, incluso, a él se unió D. Hilbert (1862-1943) en 1895. El diseño, la creación y la dirección del Instituto de Matemáticas de Göttingen constituyeron un gran servicio de Klein a las matemáticas de todos los tiempos. Además, realizó estas labores generosamente, en detrimento de su realización personal como investigador.

Desde los albores del siglo XX, el desarrollo de la Geometría Diferencial ha sido enorme. Una figura que destaca enormemente es E. J. Cartan (1869-1951). Empezó a publicar solo en geometría a partir de 1916. Motivado primero por la inadecuación del Programa de Erlangen para una descripción general de la Geometría Diferencial, estudió grupos de Lie de trasformaciones, desarrollando la teoría general de "moving frames" que generalizó la teoría cinemática de Darboux. De hecho, este trabajo llevó a Cartan a la noción de "espacio fibrado" aunque no dio, en esa época, una definición explícita de este concepto.

El aspecto global en Geometría Diferencial empezó a tener un lugar central a partir sus investigaciones sobre grupos de Lie, alrededor de 1930, y posteriormente con la tesis de G. de Rham (1903-1990) en 1931. Desafortunadamente, antes de 1930, Cartan no tuvo el reconocimiento que merecía, en parte debido a que en Francia la investigación matemática se centró desde 1900 en el campo de la teoría de funciones y, en parte también a su extraordinaria modestia. A partir de 1930 su influencia ha ido en aumento y como aseguró, en 1970, J. A. E. Dieudonné (1906-1992), *con excepción de Poincaré y Hilbert, nadie ha hecho tanto como Cartan para dar a las matemáticas su forma y puntos de vista actuales.* Hoy en día, los trabajos de Cartan se consideran como una sólida base en la que se asienta una buena parte del progreso de la Geometría Diferencial (en su honor, muchos teoremas importantes llevan el adjetivo "de Cartan" en memoria del que fue su descubridor).

Existe otra figura relevante, equiparable con Cartan, sin la que esta disciplina no sería lo que es en la actualidad. Se trata de S. S. Chern (1911-2004), gran impulsor también de la geometría diferencial global. En la década de los 40 del siglo pasado, esta disciplina apenas comenzaba, incluso la teoría de Morse era entendida y utilizada por un número muy pequeño de personas. Hoy en día, la importancia en las matemáticas de la geometría diferencial se la debemos en una gran parte a las aportaciones de Chern. Entre ellas, podemos citar la introducción de ciertas clases características, que todo el mundo llama hoy clases de Chern, y su famosa generalización del teorema de Gauss-Bonnet, obtenido mediante una bella prueba intrínseca.

Chern fue además una persona entrañable, querida y respetada por todos. Su calidad humana salta a la vista en varios acontecimientos a lo largo de su vida. En 1995, R. G. Uomini, que fue uno de los estudiantes de Chern en una de sus clases de pregrado de geometría diferencial, ganó 22 millones de dólares en la lotería de California. De esta cantidad, donó una parte sustanciosa para dotar una plaza de profesor visitante en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de California en Berkeley en honor del Prof. Chern, que fue inaugurada por Sir M. Atiyad (1929–) de la Universidad de Cambridge. Chern fue decisivo para que el International Congress of Mathematicians (ICM) 2002 se celebrase en Pekín en dicho año. En compañía de P. A. Griffith (1938–), Chern visitó al entonces presidente de China Jiang Zemin para invitarle a la ceremonia inaugural del congreso. El trato del mandatario a los dos matemáticos fue exquisito debido a que *estaba claro que Zemin veneraba a Chern*, como luego Griffith dijo.

¿Cuál de estos dos genios influyó más decisivamente en el desarrollo de la Geometría Diferencial? La respuesta a esta pregunta suele depender si el que la responde se siente más próximo a la escuela de Geometría Diferencial europea o a la estadounidense.

El auge de la Geometría Diferencial se encuadró dentro de la efervescencia de la investigación matemática de finales del siglo XIX y principios del siglo XX. Como en todo crecimiento vertiginoso, empezaron a aparecer muchas grietas, algunas de ellas de carácter estructural. D. Hilbert llamó la atención a la comunidad matemática sobre este problema en 1900 y declaró que las matemáticas deberían estar asentadas sobre bases mucho más seguras [1].

Un grupo de matemáticos, franceses en su mayor parte, H. P. Cartan (1904-2008), C. Chevalley (1909-1984), J. F. A. Delsarte (1903-1968), J. A. E. Dieudonné, L. A. C. R. de Possel (1905-1974) y A. Weil (1906-1998), agrupados bajo el pseudónimo de N. Bourbaki[4], un supuesto eminente matemático de la nación imaginaria de Poldavia, se pusieron a trabajar para llevar a buen término la propuesta de Hilbert.

Desde 1939, en varios volúmenes y con la mente puesta en los Elementos de Euclides, Bourbaki trató de estructurar y sistematizar todo el conocimiento matemático de la manera más rigurosa posible. La influencia de Bourbaki llevó la abstracción y la

[4]Hay quien asegura que eligieron este pseudónimo teniendo en mente al general francés C. D. Bourbaki que, durante la guerra franco-prusiana de 1870-1871, intentó una ofensiva contra el frente prusiano que se saldó con una rotunda y humillante derrota.

axiomatización a las matemáticas a niveles muy elevados. Los seguidores de su estructuralismo matemático[5] desterraron la intuición del razonamiento matemático. Todo lo que interfiriera con la pureza y el método lógico de las matemáticas debería ser apartado de ella. Como consecuencia, tanto la motivación y como la aplicación a la física dejaron de ser tenidas en cuenta. Este hecho, más malo que bueno, dibujó un profundo abismo entre la geometría y la física, otrora tan relacionadas entre sí. En palabras de V. I. Arnold (1937-2010) *La exclusión de las motivaciones físicas en el currículo de matemáticas en la universidad ha causado un gran daño a las matemáticas a causa de la agresividad irresponsable y autodestructiva de los matemáticos puros educados en el espíritu de Bourbaki,* [2].

Pero las cosas cambiaron drásticamente a partir de los años 70 del pasado siglo. El mismo André Weil, al que algunos calificaron como el último matemático universal [51] vecino de despacho del físico teórico E. Witten $(1951- \ )$ hasta el final de sus días en el Instituto de Estudios Avanzados de Princeton, New Jersey, afirmó: *He vivido una época en la que la física no era importante en matemáticas para mí y otros muchos, pero ahora pienso que la creciente colaboración entre matemáticas y física no solo no es preocupante, sino que es un fenómeno perfectamente saludable* [52].

Finalmente, también sobre el futuro de la Geometría Diferencial, recordemos el siguiente comentario con el que Chern aca-

[5]En su libro “Estructuralismo” J. Piaget (1896-1980) decía en 1970: *a los ojos de los matemáticos estructuralistas contemporáneos, como Bourbaki, el Programa de Erlangen sumó solo una victoria parcial para el estructuralismo, ya que ellos quieren subordinar todas las matemáticas, y no solo la geometría, a la idea de estructura.*

bó su discurso, en un congreso en su honor en 1979: *La Geometría Diferencial es una materia muy joven, no conocemos demasiado sobre ella. Sin embargo, estamos librando un combate incruento contra un enemigo que nunca se retira. Habrá muchas sorpresas. Yo, confidencialmente, les aseguro que continuaremos divirtiéndonos bastante.*

2 Necesidad de una nueva geometría

A lo largo de toda la historia, el hombre se ha cuestionado con muchas preguntas acerca de la Naturaleza. Sin duda, este afán por entender el mundo es una característica de racionalidad propia del ser humano. Entre los distintos interrogantes sobresale el siguiente: ¿Cómo es el Universo que nos acoge? En palabras del premio Nobel de Física, Murray Gell-Mann (1929–), *entender el Universo, cómo funciona, de dónde viene y hacia dónde va, es el reto más importante en la historia de la humanidad* [21].

La primera manera en que percibimos la Naturaleza es por medio de nuestros sentidos, pero éstos tienen claras limitaciones (por ejemplo, solo podemos ver unas ciertas longitudes de onda de la parte visible del espectro electromagnético, que llamamos colores). Aun así, toda persona percibe muchas cosas de la misma manera (por ejemplo, que el segmento que une dos puntos en un plano es el camino más corto entre ellos o que la longitud de un lado de un triángulo es siempre menor que la suma de las longitudes de los otros dos). Las percepciones comunes de los objetos que nos rodean se abstraen tomando rango de ciencia en la Geometría Euclídea, que está muy ligada a la intuición (lo dibujado y su dibujo parecen estar en perfecto acuerdo). Además, fue la única geometría posible hasta el descubrimiento de las llamadas geometrías no euclídeas, originadas en parte por discusiones sobre el famoso quinto postulado de Euclides [31].

Tantos científicos usando la Geometría Euclídea durante tanto tiempo no podían estar equivocados, su rango de aplicación parecía ser inmenso; incluso Newton la asumió como las matemáticas apropiadas para formular su "Teoría de Gravitación Universal". Así, en 1687 publicó su obra *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* [24, pp. 651-1019], con los fundamentos de la Física y Astronomía escritos en términos puramente geométricos. El funcionamiento del Sistema Solar que describió Newton y las observaciones estaban (aparentemente) en completo acuerdo. Pero, con el paso de los años, el espectro de conocimientos se fue haciendo más amplio y la técnica más sofisticada. Fue a finales del siglo XIX, cuando se empezaron a apreciar ciertas dificultades para aplicar la física clásica a algunos fenómenos relacionados con la luz. La intuición ya no parecía funcionar cuando del estudio de dichos fenómenos se trataba [32].

Desde un punto de vista muy simple, podríamos señalar tres dificultades que, a poco que uno piense, aparecen cuando se desea estudiar el Universo [41]:

1. Es un hecho que a veces los sentidos nos engañan. Por tanto, no deberíamos etiquetar lo percibido como realidad incuestionable, ni tampoco considerar que lo que nos es cercano se extrapola, sin más, a la globalidad del Universo.

2. En otras ocasiones, nuestras percepciones nos muestran la realidad solo parcialmente. Si unos seres planos; es decir, bidimensionales, viviesen en la superficie de un cuadro, solo serían conscientes de las dos dimensiones de su mundo, pero no detectarían el movimiento del cuadro si éste es llevado de forma cuidadosa, de una a otra sala del museo donde se expone. Nosotros, seres tridimensionales, puede que estemos también sujetos a un movimiento extra en otra dimensión no espacial, de la que no somos conscientes: el tiempo.

3. Finalmente, no podemos salir del Universo para contemplar cómo es. Los seres humanos somos parte del sistema físico que queremos describir y no siempre es uno capaz de contemplar lo que tiene ante sus ojos si está demasiado cerca. Cuando los astronautas salen de la Tierra en sus cohetes perciben (de forma extrínseca) qué forma tiene nuestro planeta. Más difícil sin duda, es llegar a la misma conclusión desde la superficie de la Tierra (de forma intrínseca).

No parece claro, por tanto, que el método científico clásico sea el camino adecuado para el estudio del Universo. Es necesaria pues una "nueva teoría física" que llevará aparejada una "nueva geometría", que seguramente no sea tan cercana a la intuición corriente como la geometría euclídea. Es ahora preciso apuntar que la ausencia del método científico en absoluto invalida una teoría que pretende, nada menos, que comprender una parte de la Naturaleza. Si alguien pensara así se está equiparando con la filosofía bourbakista, antes comentada, trasladada ahora a la Física. Las ideas excluyentes y falsamente puristas van en contra del espíritu científico que ante todo debe imperar.

Así, en lugar de disponer de experimentos previos con los que podamos interaccionar, muchas veces el punto de partida será un resultado teórico, expresado matemáticamente “en papel” (lo cual no quiere decir que no tenga una intuición física detrás). Desde un punto de vista físico, obviamente cada resultado geométrico requerirá algún tipo de corroboración experimental que, a veces, tarda en llegar.

La intuición corriente parece decirnos que todos percibimos espacio y tiempo de la misma manera, pero, una mirada más profunda nos hace pesar que, asombrosamente, ¡no es así! Cada observador dispone de un “espacio físico privado” que cambia con el paso del tiempo de su reloj. Parafraseando a Heráclito podemos decir que *nadie tiene ante sí el mismo espacio físico en dos tiempos distintos de su reloj.* Intuimos entonces que nuestra percepción del Universo se parece a lo que percibe un escáner médico que proporciona rebanadas bidimensionales de una zona del cuerpo humano (tridimensional, por supuesto). Así, en cada instante del tiempo de su reloj, cada uno percibe una “rebanada espacial” de un “universo espaciotemporal”. Tanto el espacio físico como el tiempo depende de quien lo observe. La relatividad del espacio físico de cada uno puede pensarse como una percepción individual instantánea del universo espaciotemporal. En lo que sí están todos los observadores de acuerdo es en la cuatridimensionalidad del Universo.

Es claro pues, que la geometría apropiada es la Geometría de Lorentz cuatridimensional. Su nombre hace mención al físico H. A. Lorentz (1853-1928), que fue importante en el arranque de esta disciplina. Sin embargo, el matemático que más influyó en su desarrollo fue H. Minkowski (1864-1909), desafortunadamente, el nombre Geometría de Minkowski existe con una acepción distinta.[1]

En la Geometría de Lorentz, al igual que en la Geometría de Riemann, existe la noción de curvatura. En general, ésta permite distinguir entre variedades de Riemann de manera intrínseca. Usando la curvatura definida por Riemann, en la misma línea que la curvatura de Gauss de una superficie regular, podemos tener información de una región espaciotemporal del Universo que consideremos. En efecto, en presencia de fuentes gravitatorias o de radiación electromagnética se produce una cierta curvatura en el espaciotiempo,[2] al igual que si uno deja caer una bola pesada sobre una malla elástica, ésta se curva por el peso de la bola. La malla que antes era plana, ahora está curvada y esa curvatura nos da una idea de cómo de pesada es la bola que la produce.

Esa fue la genial idea de Albert Einstein (1879-1955) para establecer la Teoría de la Relatividad. Einstein postuló cómo la masa y la radiación electromagnética producen curvatura del espaciotiempo mediante una ecuación diferencial que hoy llamamos la ecuación de campo de Einstein. Seguro que cuando la estableció tenía en mente la ecuación de Poisson de la gravitación newtoniana que da el potencial gravitatorio supuesta la existencia de una densidad de masa, pero de ningún modo hay una generalización

[1] La Geometría de Minkowski es un tipo de geometría no Euclídea en un número finito de dimensiones en la que la distancia no es uniforme en todas las direcciones, en general.

[2] Preferimos escribir espaciotiempo a espacio-tiempo pues esta última podría dar a entender una separación entre “espacio” y “tiempo” propia de la teoría newtoniana pero alejada de la realidad relativista.

en las ideas de Einstein de la teoría newtoniana de la gravitación.

En este contexto, cada región del Universo relativista ha de entenderse como un continuo de dimensión 4 dotado de una métrica de Lorentz que se obtiene como solución de la ecuación de campo de Einstein [28]. La incógnita de esta ecuación en derivadas parciales tiene en Relatividad un papel análogo al del potencial gravitatorio en gravitación clásica, pero tiene un carácter geométrico muy diferente.

Antes de llegar a esta ecuación, A. Einstein, con solo 26 años y siendo empleado de la oficina de patentes de Berna, publicó en 1905 el artículo *Sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento* [14] en el que establece lo que luego se dio en llamar la "Teoría de la Relatividad Especial", válida para un universo relativista sin efectos gravitatorios. Es curioso constatar que Einstein desarrolló en su artículo ideas que ya le preocupaban desde la adolescencia y que no estaba arropado por un ambiente académico cuando lo publicó. Desgraciadamente, la comunidad científica tardó en acoger mayoritariamente las ideas de Einstein e incluso parte de ella se mostró abiertamente en contra de las mismas. Como comentó L. Pearce Williams (1927-), Profesor de Historia de la Ciencia en la Cornell University: *La Teoría Especial de la Relatividad significó el comienzo de un difícil aprendizaje para descifrar teorías que violan el sentido común y que solo pueden ser expresadas matemáticamente* [36].

Varios años más tarde, Einstein publicó, como generalización a su artículo anterior su *Teoría de la Relatividad General* [15] donde ya introdujo su ecuación de campo, con la intención de estudiar regiones del Universo con campos gravitatorios no nulos.

La influencia de las ideas relativistas y, especialmente, del propio Einstein ha sido determinante en el desarrollo de áreas relevantes de las matemáticas, en otras ciencias y en ámbitos diversos políticos y culturales [27]. Desde los albores del siglo XX, el ir y venir de información entre física y matemáticas es incesante. Esta relación estimula y beneficia a ambas disciplinas y, en general, a toda la ciencia. Además, las ideas y la personalidad de Einstein, excelentemente divulgadas por él mismo [16] han sido fundamentales para que la ciencia sea considerada como una parte importante de la cultura de la humanidad.

3 Geometría de Lorentz y Relatividad

Llama la atención el hecho de que entre las fechas de publicación de los artículos [14] y [15] de Einstein hay un lapso de diez años. ¿Cómo puede explicarse esto siendo la Teoría Especial de la Relatividad una parte de la Teoría General? Seguramente, en gran medida se debió a la complejidad de las matemáticas requeridas para la Relatividad General. El mismo Einstein se lamentaba diciendo *he tenido que subir, con mucho esfuerzo, una montaña muy alta mientras que otros colegas físicos solo tuvieron ante si una pequeña colina*. Esa "alta montaña" era una geometría sólida, alejada de la intuición y complicada técnicamente: la geometría de Lorentz.

M. Grossmann (1878-1936), primero profesor y luego amigo de Einstein, fue el que llamó la atención de éste sobre la relevancia que tenía el cálculo tensorial desarrollado por Levi-Civita y Ricci-Curbastro. Sin duda fue un hecho fundamental en la génesis de la Teoría General de la Relatividad. Mientras que la Teoría Especial no tenía una carga matemática muy profunda y era más dada a la popularización, la Teoría General estaba solo al alcance de especialistas. Un día le preguntaron a Einstein por qué su Teoría General de la Relatividad tendría que ser acertada. Primero pensó un poco y luego su respuesta fue que *una teoría física que utiliza unas* *matemáticas tan bellas no puede dejar de ser cierta.* Esta anécdota no es el único indicio de que Einstein estaba totalmente maravillado con la geometría de Lorentz.

El modelo que sirvió para establecer la Teoría Especial es el espaciotiempo de Lorentz-Minkowski $\mathbb{L}^4$. Éste puede ser tratado como un espacio afín cuatridimensional, construido sobre el espacio vectorial $\mathbb{R}^4$ al que consideramos dotado de un producto lorentziano[1] (véase, por ejemplo [40, 54]). De esta manera, la geometría de $\mathbb{L}^4$ puede ser fácilmente entendida por un estudiante de grado con un buen nivel de geometría lineal y multilineal.

Sin embargo la geometría de este espacio afín lorentziano es muy distinta de la del espacio afín euclídeo $\mathbb{E}^3$ (obviamente, no solo porque aquel tiene dimensión 4 mientras que éste tiene dimensión 3). Las figuras se contemplan de una "nueva forma", alejada de la intuición. Existe, por ejemplo, un tipo de triángulos, llamados triángulos hiperbólicos que tienen la propiedad de que dos de sus lados miden juntos menos de lo que mide el otro (con el criterio para medir específico de esta geometría), contrariamente a lo que el sentido común nos sugiere (tal es así que esta propiedad geométrica suele nombrarse como "la desigualdad de Minkowski en el sentido equivocado"). Pero tenemos que disculpar a nuestro sentido común que entiende por triángulo una figura espacial mientras que los puntos de un triángulo en $\mathbb{L}^4$ son "sucesos espaciotemporales" con lo que la medida de un lado no tiene aquí el carácter euclídeo corriente; más aún, para este tipo de triángulos, la medida de cada uno de sus lados significa el intervalo de tiempo

[1] Forma bilineal simétrica, no degenerada y con índice de Sylvester igual a 1.

propio de un observador en caída libre, cuyo movimiento relativista representa. Esta propiedad geométrica dio, en su momento, una explicación satisfactoria a una paradoja que pretendía probar, ni más ni menos, que la Teoría de la Relatividad era contradictoria (la paradoja de los gemelos) [50].

Desde 1915, la Geometría de Lorentz local, único aspecto conocido entonces, ha sido el lenguaje comúnmente aceptado para su uso en esta importante teoría física. Con la ayuda de esta geometría se podían expresar matemáticamente conceptos físicos y sus comportamientos con relación a una parte del Universo de una manera bastante razonable. Geometría de Lorentz y Relatividad comenzaron a caminar unidas y a beneficiarse mutuamente; en particular, esto despertó entre los matemáticos el interés por el desarrollo puramente teórico de esta nueva geometría. Además, el análisis tensorial local sobre una variedad de Lorentz es, en muchos aspectos, similar al bien conocido en el caso riemanniano. El carácter no degenerado de una métrica de Lorentz es frecuentemente suficiente para extender propiedades y comportamientos de las métricas de Riemann, por ejemplo, para el proceso de subir y bajar índices o para el establecimiento de la conexión de Levi-Civita de una métrica de Lorentz (y su correspondiente derivación covariante).

El carácter local de la geometría permaneció mucho tiempo como el único considerado. Incluso, esta geometría local permitía predecir, asombrosamente, comportamientos físicos tan relevantes como que la trayectoria de un rayo de luz debe curvarse cuando pasa cerca de un cuerpo celeste de gran masa. En efecto,

K. Schwarzschild (1873-1916) obtuvo en 1916 la primera solución no trivial a la ecuación de Einstein para el vacío. Einstein quedó maravillado con el trabajo de Schwarschild y afirmó que no pensaba que se pudiera obtener tal solución de una forma tan simple. Desafortunadamente, por aquel entonces, Schwarzschild se encontraba inmerso en el conflicto bélico que asolaba Europa y murió ese mismo año, estando todavía en el ejercito, de una extraña enfermedad. Tras la obtención de su modelo de espaciotiempo, estudiando ciertas líneas geodésicas de él, obtuvo el ángulo que debería doblarse la luz cuando pasa cerca de una gran masa en su viaje desde una estrella hasta la Tierra (ver por ejemplo [34, Cor. 13.20] o [45, Subsect. 7.4.6]).

El descubrimiento de Schwarzschild fue hecho "en papel" y no tuvo mucha popularidad, pues nadie creía que un cuerpo tan grande pudiera tener cabida en la realidad. Se le tildó de "resultado teórico", usando el calificativo de forma peyorativa, y se argumentó que era imprescindible una comprobación experimental. Y así fue, en 1919 A.S. Eddington (1882-1944) viajó a la isla Príncipe en África occidental a fin de estar presente allí durante un eclipse solar. Mediante la observación con un telescopio adecuado de las proximidades del Sol durante el eclipse se constató la imagen de una estrella a un lado del Sol que de hecho se encontraba alineada con el Sol y la Tierra. Las mediciones experimentales obtenidas del ángulo determinado por las posiciones real y virtual de la estrella concordó suficientemente con el obtenido a partir del modelo de Schwarzschild.

No obstante, lo realmente sorprendente son las predicciones que la geometría hace sobre el comportamiento del Universo en su conjunto, tanto en el futuro como en un pasado muy lejanos. La Cosmología relativista ocupa la investigación de muchos científicos y tiene importancia en varios niveles del conocimiento humano.

A. A. Friedmann (1888-1925) y G. H. J. E. Lemaître (1894-1966), de manera independiente en 1922 y 1927, respectivamente, [18], [30] analizaron la Ecuación de Einstein e interpretando la solución obtenida llegaron a la conclusión de que las galaxias del Universo deberían estar separándose (en breve, que el Universo estaba en expansión). Einstein quedó maravillado del argumento geométrico que condujo a esta interpretación física (a pesar del restrictivo modelo de universo empleado) pero tardó en aceptar esta posibilidad, quizá teniendo en mente su famosa frase: *cuanto más se parecen las matemáticas a la realidad, menos ciertas son; cuando más ciertas son, menos se parecen a la realidad.* De nuevo había que buscar algún tipo de evidencia experimental de este hecho obtenido “en papel”.

En efecto, en 1929, el famoso astrónomo E. P. Hubble (1889-1953) obtuvo una ley experimental (es decir mediante observaciones con su telescopio) de la expansión de las galaxias en razonable acuerdo con lo que predijeron Friedmann y Lemaître, por argumentos puramente teóricos.

En 1931, Lemaître, que era además matemático, usó un razonamiento de continuidad para concluir: *Si hoy en día el Universo se dilata, en el pasado tuvo que ser mucho más pequeño, mucho más denso y condensado en un átomo primitivo.* Aunque la afirmación de Lemaître necesitaba de una evidencia experimental, era muy atractiva pues parecía apoyar el hecho de un inicio del Universo. Más aún cuando Lemaître describía el surgimiento del Universo del átomo primitivo como la explosión de un cohete de fuegos artificiales. Pero dicha descripción se complicaba cuando Lemaître añadía que el cohete no estallaba en un espacio y tiempo preexistente, sino que el estallido del cohete significaba el comienzo simultáneo del espacio y el tiempo con la expansión producida por la explosión.

Lemaître, que fue también sacerdote católico, siempre supo mostrar su hipótesis de comienzo del Universo desde un punto de vista estrictamente físico y de manera autónoma de cualquier connotación metafísica. Incluso cuando el Papa Pío XII le llamó al Vaticano y le preguntó por el alcance de su descubrimiento, Lemaître le dejó muy claro que él no estaba dando una prueba de la creación del mundo por Dios. De hecho, sus argumentos eran totalmente científicos mientras que la creencia en una creación divina del mundo es propia de la fe. Como acertadamente señaló Lemaître, ciencia y fe son dos caminos que no han de interferirse, puede que vayan paralelos en algunas personas o divergentes en otras pero nunca uno de ellos ha de condicionar al otro.

En 1948 triunfa la teoría alternativa del Universo Estacionario [26] (es decir, éste siempre ha sido y será como es ahora) de T. Gold (1920-2004), H. Bondi (1919-2005) y F. Hoyle (1915-2001). Desde luego, esta teoría estaba basada en argumentos físicos, sustentados en parte por la modificación que Einstein hizo de su ecuación al introducir un nuevo término con la constante cosmológica, y quizás, por el poco crédito concedido por algunos a Lemaître al ser matemático, belga y sacerdote. En este sentido se cuenta una anécdota muy ilustrativa. En una reunión científica en 1960, Hoyle, al ver entrar a Lemaître en la sala de conferencias, dijo haciendo uso de su ironía británica *this is the big bang man*, refiriéndose a Lemaître. Lo que no se imaginó Hoyle es que con esta socarrona frase acababa de poner nombre a la teoría de Lemaître.

G. A. Gamow (1904-1968), discípulo de A. Friedmann, propuso un test para corroborar la existencia de una gran explosión inicio del Universo. Según él [19] existe todavía una cierta radiación, vestigio de esos primeros instantes, a la que llamó radiación de fondo. Gamow propuso encontrar dicha radiación. En 1965, dos ingenieros de telecomunicaciones, A. A. Penzias (1933-) y R. W. Wilson (1936-) descubrieron la radiación cósmica de fondo. Mientras trabajaban en un nuevo tipo de antena en los Laboratorios Bell en Holmdel, Nueva Jersey, encontraron una fuente de ruido en la atmósfera que no podían explicar. Después de afinar la recepción de la antena, el ruido fue finalmente identificado como la radiación de fondo de Gamow. Aunque algunas veces se tilda su descubrimiento de pura casualidad, no es del todo cierto pues Penzias y Wilson estaban al tanto de las ideas de Gamow y sabían como reconocer dicha radiación. En 1978 recibieron por ello, el premio Nobel de Física.

En la segunda mitad del siglo pasado se produjeron avances relevantes en Cosmología relativista con la introducción de técnicas cada vez más sofisticadas de geometría de Lorentz. Precisamente en 1955, el año de la muerte de Einstein, A. K. Raychaudhuri

(1923-2005), demostró un teorema [45, Th. 4.3.4] que podía interpretarse diciendo que en un universo en contracción y sin radiación electromagnética, cada observador que no percibe rotación de la fuente gravitatoria desaparece en un tiempo propio finito. Además, en los últimos instantes de su vida, percibe que sobre él actúa una densidad de energía enorme, no acotada. Se trataba del primer resultado que podía interpretarse como de existencia de agujeros negros relativistas, i.e., de la predicción de la existencia de una estrella del Universo con una gravedad tan fuerte que ni siquiera la luz que emite podría abandonar sus inmediaciones y, por tanto, no la podríamos ver.

El teorema de Raychaudhuri fue pionero en la prueba de existencia de agujeros negros relativistas. En él, se introdujo una ecuación, que a partir de entonces se llamó la ecuación de Raychaudhuri y que, combinada con la ecuación de Einstein, llevó al resultado. Su prueba es simple y tanto la interpretación física de sus ingredientes como de sus consecuencias es muy clara. Sin embargo, en su día no fue considerado como físicamente razonable pues supone que el Universo obedece un modelo relativista (un tipo de fluido perfecto llamado "dust") al que se le tachó de poco realista.

Hemos de señalar que la idea de la existencia de estrellas muy densas no fue exclusiva del siglo XX ni de los relativistas. Históricamente, el primer teorema de existencia de agujeros negros data de 1799 [25, Appendix] y fue establecido por Pierre S. de Laplace (1749-1827). Para su prueba, naturalmente usó la ecuación de Poisson de la teoría newtoniana de gravitación. En este resultado, Laplace mostró que si la masa y el radio de una estrella pudieran elegirse convenientemente, la velocidad de escape sería tan grande que la luz producida en la superficie de la estrella acabaría deteniéndose en las proximidades de ésta y volviendo a caer a su superficie. Laplace interpretó su teorema diciendo que si existiese una estrella con la densidad de la Tierra, y con diámetro 250 veces el del Sol, su gravedad sería tan potente que los rayos de luz que emite no llegarían a nosotros y, por tanto, no la podríamos ver.

Como tantas veces a lo largo de la historia de la ciencia, una "opinión de autoridad", en esta ocasión del estilo *es imposible que exista una estrella con esas características,* hizo que la predicción de Laplace fuera considerada por la comunidad científica de la época.

A partir de los años 70 se produce una verdadera revolución científica con el uso de técnicas de Geometría de Lorentz global en Cosmología. S. Hawking (1942-) y R. Penrose (1931-) estudiaron sistemáticamente propiedades geométricas del Universo al completo [25], [37]. A título de ejemplo, uno de los primeros resultados de Hawking se interpreta diciendo que un universo espacialmente cerrado y que se expanda debe haber sido "singular" en el pasado, i.e., existió una singularidad inicial a partir de la que surgió el espaciotiempo al completo. Este teorema de Hawking predice la existencia de una gran explosión inicial del espaciotiempo o big bang. Resulta curioso que Hawking eligió el *Liverpool singularities symposium* de 1971, para comunicar su resultado [23]. Este congreso reunió a participantes de diferentes áreas cuyos trabajos estaban encuadrados en alguna de las diferentes acepciones del término singularidad en matemáticas.

A este resultado siguieron una serie teoremas de Hawking y Penrose, cada vez más ajustados y con una técnica más depurada, que establecían de una forma general, i.e., para una familia muy grande de modelos cosmológicos, la existencia de un big bang (Lemaître solo usó un modelo geométrico concreto para el Universo). En breve, podemos decir que demostraron teoremas de naturaleza geométrica cuya interpretación física era que, *bajo condiciones físicas razonables, un universo espaciotemporal ha de tener una singularidad en su pasado que se interpreta como su instante inicial.* Pero quizás mucho más impactante fue la extensión del teorema de Raychaudhuri a universos relativistas muchos más generales y razonables, prediciendo que una estrella, siempre que posea suficiente masa, se derrumbará sobre ella misma por la acción de su propia gravedad, transformándose en un agujero negro [34, Chap. 14], [3, Chap. 12] y [9].

Mientras que Hawking es un físico brillante, Penrose es un matemático con sólida formación en geometría algebraica (tema en el que se encuadró su tesis doctoral en 1958).[2] La colaboración científica entre ambos ha sido tremendamente fructífera. Además, en mi opinión, esta colaboración ha sido un paradigma para la investigación científica interdisciplinar.

En aquel tiempo, mientras que los físicos estaban más dispuestos a la cooperación con los geómetras, éstos eran reticentes

[2] Sin duda esta formación influyó en su posterior invención de la teoría twistor donde el análisis complejo ayudo en algunos aspectos importantes cruciales a la teoría general de la Relatividad.

al contacto con los físicos relativistas por motivos explicados anteriormente. Había que idear un lugar de encuentro donde los matemáticos y físicos caminasen juntos desde su etapa de formación para la investigación. Con este fin, un físico prestigioso R. K. Sachs (1932-) y un matemático de no menos altura H. Wu (1940-), ambos de la Universidad de California en Berkeley (USA), se pusieron de acuerdo en escribir un texto de Relatividad para matemáticos [45] que sirviera de apoyo para aquellos geómetras interesados en la investigación relacionada con este área de Física.[3] Los autores desarrollaron su contenido usando la metodología expositiva usual de un libro de matemáticas, relegando muchas veces las motivaciones e interpretaciones físicas a la "letra pequeña que se omite en una primera lectura", pero que sin duda ha de visitarse cuando ya haya sido superada la parte matemática.

Del desconocimiento de algunos matemáticos puros acerca de la Relatividad en ese tiempo podría ser un indicio el siguiente detalle: poco después de la publicación de su libro, Sachs y Wu escribieron un survey [46] donde presentaron su libro e incluyeron también el estado de algunos temas de la investigación en Relatividad de la época. Se publicó en la prestigiosa revista *Bull. Amer. Math. Soc.* en el año 1977. En aquellos años, había en cada revista una persona encargada de transcribir y poner en el formato de la revista cada artículo antes de pasarlo a la imprenta. Al cabo de años de trabajo, esta persona acababa familiarizada con términos y frases de uso corriente en matemáticas. En la cabecera de las pá-

[3] A comienzos de los años 80, encontré el libro en la biblioteca del Departamento de Física Nuclear, a la que amablemente me permitían el acceso los amigos de allí.

ginas impares del interior escribió “General Relativity and Cohomology” como título del artículo en lugar de “General Relativity and Cosmology”, cambiando por error la última palabra por otra muy parecida y que le era más familiar. Antes de la salida del número de la revista que contenía el survey, nadie detectó el simpático error y ahí quedó para siempre.

El texto de Sachs y Wu fue sin duda “un camino real para facilitar el acceso de los geómetras a la Relatividad”. Además, tiene la virtud de que uno puede elegir el grado en que implicarse en la parte puramente física. El escalón más básico es reducir la Relatividad General al estudio de las tres ecuaciones diferenciales clásicas: Ecuaciones materiales simples, Ecuaciones de Maxwell y Ecuación de Einstein. Con cada una de ellas se describe, respectivamente, como influyen geometría y radiación en la distribución de masa; geometría y masa en la radiación electromagnética, y masa y radiación en la geometría. De forma intermedia, uno puede trabajar en geometría con la vista puesta en posibles aplicaciones de los resultados matemáticos. A un nivel superior, [45] y [46] siguen dando pistas para el estudio de problemas físicos abiertos y sus posibles desarrollos matemáticos.

En esta, a todas luces somera, descripción de algunos de los momentos cumbres de esta hermosa relación entre Geometría de Lorentz y Relatividad, solo he destacado algunos episodios claves, en mi opinión, tratando de señalar la mutua e importante influencia que Geometría de Lorentz y Relatividad han tenido desde siempre.

4 Geometría de Lorentz per se

La geometría de Lorentz también ha tenido y tiene un desarrollo autónomo, no motivado por problemas ni por posibles aplicaciones de naturaleza física. Aunque es muy agradable tener en mente sus orígenes físicos y la posible aplicación de los resultados geométricos que se obtengan, no pueden ser estos los únicos alicientes para la investigación en geometría de Lorentz.

Cuando una rama de las matemáticas comienza su andadura, suele atraer a un gran número de investigadores. Algunos de ellos, con evidente miopía científica, solo intentaron "reproducir" en geometría de Lorentz resultados bien asentados en geometría de Riemann. Obviamente, aquellas propiedades que se traspasan desde la geometría de Riemann, con más o menos dificultad, y que muestran comportamientos en geometría de Lorentz paralelos con otros de la geometría de Riemann, no son especialmente interesantes. Más aún, la proliferación de artículos con pequeños avances lorentzianos muy parecidos a hechos bien conocidos en geometría de Riemann hicieron, en su día, que algunos geómetras dudaran de la entidad y autonomía de la geometría de Lorentz. El descrédito de este tipo de artículos se aplicó, por extensión e injustamente, a todos los trabajos en geometría lorentziana. Pero el paso del tiempo ha puesto las cosas en su sitio: ha habido muchos artículos importantes e influyentes en este área que han permanecido en el tiempo y que son usados por muchos investigadores, incluso de otras áreas. Curiosamente, algunos de los que acusaron a la geometría de Lorentz de falta de independencia de la geometría de Riemann han vuelto su vista hacia aquella, donde ahora se encuentran confortablemente instalados.

Actualmente, hay un colectivo de muy buenos investigadores en geometría de Lorentz, en el que destaca un selecto grupo español, con una serie de congresos monográficos periódicos a nivel mundial que empezaron con el congreso “Lorentzian Geometry, Benalmadena 2001”, del que el autor de este discurso fue uno de los impulsores. Las siguientes ediciones tuvieron lugar en Murcia en 2003, Casteldefells en 2005, Santiago de Compostela en 2007, Martina Franca (Italia) en 2009, donde esta serie de reuniones tomó su actual carácter internacional, Granada en 2011, y, finalmente, se celebró la séptima edición en Sao Paulo (Brasil) en 2013.

Hoy en día la investigación en geometría de Lorentz tiene muchas y variadas facetas, como lo muestra la gran cantidad de muy buenos artículos publicados en el área en los últimos treinta años. Las propiedades y hechos que importan son las genuinas de esta geometría, especialmente las que constituyen el cuerpo de la geometría de Lorentz global (ver [47], [48] para una exposición de la génesis, el desarrollo y los avances de algunos temas selectos de geometría de Lorentz global que, además, tienen implicaciones importantes en Relatividad General).

Grosso modo, hay conceptos comunes en geometría de Riemann y de Lorentz que se comportan de forma distinta en esta última y hay conceptos propios de la Geometría de Lorentz cuyo comportamiento está por explorar en todos sus aspectos (ver [35], [43] y referencias en ellos). Incluso, la historia nos muestra que estudios que comenzaron en geometría de Lorentz han tenido una contrapartida riemanniana que ha ayudado a ésta en su desarrollo.

Responder a la pregunta ¿qué se investiga hoy en geometría de Lorentz? no es, por tanto, tarea fácil. No obstante, a título de ejemplo vamos a explicar someramente un tema, que interesa por igual a geómetras y físicos y que ocupa un lugar preferente en el denominado análisis geométrico. Además, desde 1995 ha sido uno de las materias de investigación en las que, modestamente, el autor de este discurso y varios de sus colaboradores han hecho alguna aportación.

El estudio de las hipersuperficies espaciales[1] en espaciotiempos tiene importancia tanto a nivel geométrico como físico. Intuitivamente, una hipersuperficie espacial modela el espacio físico en un instante. Así, el desplazamiento de una hipersuperficie espacial en el espaciotiempo que la contiene, siguiendo el sentido de futuro de éste, puede pensarse como los diferentes espacios físicos en instantes posteriores. De hecho, las hipersuperficies espaciales son claves para la resolución de varias EDPs que en física se interpretan como problemas del tipo “el presente determina el futuro”, por ejemplo: sobre una hipersuperficie espacial se escri-

[1] El adjetivo espacial significa que la métrica que hereda la hipersuperficie de la métrica de Lorentz ambiente es definida positiva en todo punto y, por tanto, riemanniana.

ben las ecuaciones de ligadura de las ecuaciones de Maxwell que previamente se han de considerar para probar que las ecuaciones de Maxwell tienen solución [45, Th. 3.11.1]. Dicho de manera intuitiva, si conocemos el campo electromagnético en un instante de tiempo "obedeciendo las ecuaciones sobre la hipersuperficie", conoceremos cómo será el campo electromagnético tanto en el futuro cercano como en el pasado, también cercano. Además, las hipersuperfices espaciales han tenido un papel crucial en el estudio de las singularidades en espaciotiempos, como, por ejemplo, en el clásico teorema de singularidad de Hawking [34, Th. 55A].

Entre las hipersuperficies espaciales, las que tienen curvatura media[2] constante constituyen un conjunto de datos iniciales para resolver la ecuación de Einstein [8]. Variacionalmente, una hipersuperficie espacial tiene curvatura media constante si es, localmente, un punto crítico del funcional área sujeto a una cierta ligadura de volumen constante. Una hipersuperficie espacial de curvatura media cero se dice maximal. Una hipersuperficie maximal resulta ser un punto crítico del funcional área, y así este concepto es una extensión a mayores dimensiones del de geodésica (espacial).

La ecuación de Euler-Lagrange para el problema variacional del funcional área sobre grafos espaciales en $\mathbb{L}^{n+1}$ es una ecuación diferencial en derivadas parciales cuasi-lineal y elíptica (expresa que la curvatura media del grafo espacial es cero) cuyo as-

[2]La curvatura media de una hipersuperficie espacial es en cada punto, salvo un signo, la media de todas las curvaturas principales en ese punto. Es una cantidad extrínseca que cambia de signo si se invierte el sentido elegido en las direcciones normales.

pecto presenta, aparentemente, pequeñas diferencias con respecto a la ecuación de hipersuperficies minimales para grafos en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^{n+1}$. Un hecho sorprendente que atrajo la atención de muchos matemáticos sobre la ecuación de grafos maximales en $\mathbb{L}^{n+1}$ fue el famoso resultado de S. Y. Cheng y S. T. Yau [7] según el cual, no importa cuál sea la dimensión $n(\geq 2)$, las únicas soluciones enteras (i.e., definidas sobre todo $\mathbb{R}^n$) de la ecuación de grafos maximales en $\mathbb{L}^{n+1}$ son las funciones afines cuyos grafos son (hiperplanos) espaciales. Este teorema extendió uno previo de E. Calabi obtenido en 1970 y válido solo para $n \leq 4$ [6]. La sorpresa venía de que para la ecuación de hipersuperficies minimales para grafos en $\mathbb{R}^{n+1}$, era conocido que las únicas soluciones enteras son las funciones afines solo para $n \leq 7$ (existiendo un contraejemplo para cada $n \geq 8$). Estos resultados fueron la combinación de aportaciones de varios investigadores, empezando por Bernstein que probó el caso $n = 2$ en 1914. De manera que el resultado de Cheng y Yau se enmarca en el segundo de los tipos explicados anteriormente. Además, la demostración de Chen y Yau era geométrica. En lugar de atacar la ecuación diferencial directamente, dedujeron su resultado de unicidad de soluciones a partir de un teorema en el que obtuvieron todas las hipersuperficies maximales completas[3] de $\mathbb{L}^{n+1}$, probando además la completitud de un grafo espacial entero de curvatura media constante (lo cual no es en absoluto inmediato).

El resultado de Cheng y Yau fue un gran impulso al estudio

[3]La completitud significa que todas las geodésicas inextendibles de la hipersuperficie están definidas para cualquier valor de su parámetro.

de la geometría global de las hipersuperficies maximales (y espaciales de curvatura media constante) en espaciotiempos ambientes mucho más generales (y más realistas) que $\mathbb{L}^{n+1}$ [4] y referencias allí. En algunas familias de espaciotiempos se obtuvieron también resultados de unicidad para soluciones enteras de una EDP más general que la estudiada por Cheng y Yau. Dada la génesis del problema, el teorema de unicidad de Cheng y Yau y otros muchos posteriores, se han agrupado bajo el nombre "resultados de tipo Calabi-Bernstein" [5], por ejemplo.

Parafraseando a Chern, para nosotros fue una sorpresa muy agradable comprobar que ciertos espaciotiempos (que generalizan a los clásicos de Robertson-Walker), espacialmente abiertos pero no espacialmente homogéneos y que modelan un espacio físico que evoluciona en el tiempo manteniendo su carácter parabólico pueden ser posibles modelos cosmológicos compatibles con el principio holográfico. En ellos, la parabolicidad puede ser inducida sobre una hipersuperficie espacial completa bajo algunas suposiciones razonables (que no involucran curvatura). Esto da pié a determinar, en varios casos, todas las hipersuperficies maximales completas y todas las soluciones enteras de la ecuación de grafos maximales en estos espaciotiempos ambientes, definidas sobre una variedad de Riemann parabólica de dimensión arbitraria, estableciendo nuevos resultados de tipo Calabi-Bernstein [44].

5 Agradecimientos

Durante la elaboración de este discurso, he tenido ocasión de reflexionar sobre el devenir de mi vida y las personas que lo han hecho posible. Desgraciadamente, el ruido y la prisa diaria hacen a veces que uno haya visto como normal lo que en la mayoría de los casos debiera calificarse como excepcional. Para empezar, una intensa investigación matemática no se puede llevar a cabo sin la comprensión y ayuda de los seres queridos que nos rodean. Mi esposa, Ana María, desde el principio de nuestro matrimonio, ha sido fuente constante de ánimo y ha sabido estar a mi lado no solo en los momentos en los que el éxito me sonreía sino también en los que las dificultades parecían insalvables. No había en mi familia ninguna tradición universitaria, de manera que al principio en mi trabajo me dejé guiar por mi intuición y una tozudez considerable. Mi esposa nunca se mantuvo al margen en mi labor profesional, supo aconsejarme y ser paciente conmigo cuando era necesario. Tengo claro cuánto le debo y por eso hago patente mi profundo agradecimiento. También agradezco a nuestros hijos, Alfonso y Diego, el estar siempre pendientes de mí. Ellos han sido sin duda la mayor de las empresas a cuyo buen fin he colaborado.

Por otro lado, en este sistema universitario donde la tarea de dirección depende, en gran medida, de la buena voluntad del director, he de señalar que tuve la suerte de estudiar con el Ilmo. Sr. Académico Prof. D. Manuel Barros Díaz, al que agradezco mucho que en el curso 1977-78 se fijara en mí, entonces alumno suyo, en la asignatura “Geometría Diferencial”. Supo entusiasmarme con una materia muy atractiva que explicaba con aire muy moderno. Posteriormente, me introdujo en el mundo de la investigación, primero dirigiéndome una tesina de licenciatura y luego compartiendo conmigo los problemas que había madurado en una estancia en EE. UU. que fueron la génesis de la tesis doctoral que él me dirigió. Con el buen hacer que le infundió su maestro el Ilmo. Sr. Académico Correspondiente Prof. D. Antonio Martínez Naveira y que él refinó, me condujo por el estudio de varios temas selectos de geometría de Riemann indefinida que me prepararon para mi posterior encuentro con la geometría de Lorentz.

Gracias a mis alumnos, tanto de grado como de máster. Gracias a los que depositaron en mi su confianza para ser guía de su investigación. Gracias a todos mis colaboradores y a todos los que, en estos treinta y cinco años de trabajo, han querido compartir conmigo un tiempo de creación matemática. De todos he aprendido mucho y espero seguir haciéndolo por algún tiempo más.

Gracias a la institución que ha acogido mi vida académica, la Universidad de Granada, que ha sido, y es, para mí mucho más que mi lugar de trabajo. Gracias, también, a la ciudad de Granada, que desde hace ya casi cuarenta años ha sido el escenario donde se ha desarrollado mi vida.

Muchas gracias Excmos. Sra. y Sres. Académicos.

Muchas gracias a todos por acompañarme en este acto.

Bibliografía

[1] ALMIRA, J.M. Y SABINA DE LIS, J.C., *Hilbert: matemático fundamental,* Nivola libros y ediciones, 2007.

[2] V. I. ARNOLD, V.I., *Lectures on Partial Differential Equations,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg and PHASIS, Moscow, 2004.

[3] BEEM, J.K., EHRLICH, P.E. AND EASLEY, K.L., *Global Lorentzian Geometry, Second Ed.*, Dekker, New York, 1996.

[4] CABALLERO, M., ROMERO, A. AND RUBIO, R.M., Constant mean curvature spacelike hypersurfaces in Lorentzian manifolds with a timelike gradient conformal vector field, *Classical Quant. Grav.*, **28** (2011), 145009–145022.

[5] CABALLERO, M., ROMERO, A. AND RUBIO, R.M., New Calabi-Bernstein results for some elliptic nonlinear equations, *Anal. Appl.*, **11** (2013), 130002(1–13).

[6] CALABI, E., Examples of Bernstein problems for some nonlinear equations, *Proc. Symp. Pure Math.*, **15** (1970), 223–230.

[7] CHENG, S.Y. AND YAU, S.T., Maximal space-like hypersurfaces in the Lorentz-Minkowski spaces, *Ann. Math.*, **104** (1976), 407–419.

[8] CHOQUET-BRUHAT, Y. AND GEROCH M. R., Problème de Cauchy intrinsèque en relativité générale, *C.R. Acad. Sci. Paris,* **269** (1969), 746–748.

[9] CLARKE, C.J.S., *The Analysis of Space-Time Singularities,* Lecture Notes in Physics, vol. **1**, Cambridge Univ. Press, 1993.

[10] CORDON-CARDO, C., Matemáticas contra el cáncer, *La Vanguardia,* 1-03-2009, pág. 31.

[11] DARBOUX, G., *Leçons sur la téorie general de las surfaces,* vols. 1,2,3,4, Hachette Bnf, 2012.

[12] DESCARTES, R., *Discurso del Método, Dióptrica, Meteoros y Geometría,* Traducción comentada de G. Quintás, Ed. Alfaguara, Madrid, 1981.

[13] EISENHART, L.P., *A treatise on the Differential Geometry of curves and surfaces,* The Athenaeum Press, Boston 1909.

[14] EINSTEIN, A., Zur Elektrodynamik bewegter Körpen, *Annalen der Physik* **17**(1905), 891–921 (Puede verse una traducción al español en John Stadchel ed. *Einstein 1905, un año maravilloso,* Crítica Barcelona 2001, 111–142).

[15] EINSTEIN, A., Zur allgemeinen Relativitätstheorie, *Königlich Preissische Akademie der Wissenschaften (Berlin), Sitzungsberichte* (1915), 778–786 (Puede verse una traducción al español

en A. Einstein, *El significado de la Relatividad*, Espasa-Calpe, Madrid, 1980).

[16] EINSTEIN, A., *Relativity, the Special and the General Theory. A clear explanation that anyone can understand*, fitteenth ed., Wings books, New York, 1952.

[17] EUCLIDES, *The thirteen books of Euclid's Elements* (traducidos, comentados e introducidos por T.L. Heath), Second ed. vols. 1,2,3,4, Dover Pub. Inc. New York, 1956.

[18] FRIEDMANN, A., On the curvature of space, *General Relativity and Gravitation*, **31** (1999), 1991–2000.

[19] GAMOW, G., The origin of elements and the separation of Galaxies, *Phys. Rev. Lett.*, **74** (1948), 505–506.

[20] GAUSS, K.F., *Disquisitiones generales circa superficies curvas* (traducido al inglés por P. Dombrowsky en *150 years after Gauss*), Astérisque num. **62**, Soc. Math. de France, 1979.

[21] GELL-MANN, M., http://tuvalu.santafe.edu/~mgm/

[22] GRAY, J., *Worlds out of nothing. A course in the history of the Geometry in the 19th century*, Springer Undergraduate Math. Series, Springer-Verlag, London 2011.

[23] HAWKING, S., The Definition and occurrence of singularities in general relativity, Lect. Notes Math., **209** (1971), 275–279.

[24] HAWKING, S., (editor y comentarista), *A hombros de gigantes: las grandes obras de la Física y la Astronomía*, 3ª ed., Crítica, Barcelona, 2012.

[25] HAWKING S.W. AND ELLIS G.F.R., *The large scale structure of space-time*, Cambridge Univ. Press, 1973.

[26] HOYLE, F., A new model for the Expanding Universe, *Monthly Notices Roy. Astr. Soc.*, **108** (1948), 372–382.

[27] ISAACSON, W., *Einstein, su vida y su universo*, Círculo de lectores, Barcelona 2008.

[28] KRIELE M., Why are we living in a Lorentzian universe?,*Class. Quantum Grav.*, **11**(1994), 1325–1330.

[29] LALLENA, A.M. Y ROMERO, A., Espacios vectoriales métricos y Teoría especial de la Relatividad, *Rev. Mat. Epsilon* **5** (1986), 33–37.

[30] LEMAÎTRE, G., The Expanding Universe (con una nota del editor A. Krasinski), *Gen. Relativity Gravitation*, **29** (1997), 637–680.

[31] LEWIS, F.P., History of the Parallel Postulate, *Amer. Math. Monthly* **27** (1920), 16–23.

[32] MICHELSON, A.A. AND MORLEY, E.W., On the Relative Motion of the Earth and the Luminiferous Ether, *Amer. J. Sci.*, **34** (1887), 333–345.

[33] MONGE, G., *Application de l'Analyse a la Géometrié 4 ed.*, Bernard, Paris, 1809.

[34] O'NEILL, B., *Semi-Riemannian Manifolds with Applications toRelativity*, Academic Press, 1983.

[35] PALOMO, F.J. AND ROMERO, A., Certain Actual Topics on Modern Lorentzian Geometry, *Handbook of Diff. Geometry*, vol. **II**, Edited by F.J.E. Dillen and L.C.A. Verstraelen, Elsevier, 2006, 513–546.

[36] PEARCE WILLIAMS, L., *Relativity theory: its origins and impact on modern thought*, Wiley, New York 1969.

[37] PENROSE R., *Techniques of Differential Topology in Relativity*, Regional Conf. Ser. in Appl. Math., Siam, **7**, 1972.

[38] RIEMANN, B., Sur les hypotheses qui servent de fondement a la geométrie, *Oeuvres Mathématiques de Riemann, traduites par L. Langel, librairie A. Blanchard, Paris,*(1968), 280–299.

[39] ROMERO, A., Fundamentos Matemáticos de la Relatividad General: Cosmología, *Publ. Dep. Mat. Univ. Murcia, Serie Gris*, **14** (1996), 81–93.

[40] ROMERO, A., Geometría y Relatividad. Una introducción a la geometría básica de la teoría, *II Jornadas: Lecciones de Matemáticas, Rev. S.A.E.M. Thales Epsilon*, **14** (1998), 305–320.

[41] ROMERO, A. Geometría de Lorentz, el Universo en una hoja de papel, *Revista de divulgación matemática Matematicalia*, vol. **1**, no. 1, (2005).

[42] ROMERO, A. Geometría de Lorentz: de lenguaje a herramienta básica en Relatividad General, *Conferencies Facultat de Matematiques i Estadística, UPC, Curs Einstein* 2004-2005, Vol. **2** (2006), 123–147.

[43] ROMERO, A. An introduction to certain topics on Lorentzian gometry, *Topics in Modern Differential Geometry,* Simon Stevin Institute Lectures 2008-2009 vol. **1**, Edited by S. Haesen and L.C.A. Verstraelen, 2010, 195–220.

[44] A. ROMERO, A., RUBIO, R.M. AND SALAMANCA, J.J., Uniqueness of complete maximal hypersurfaces in spatially parabolic generalized Robertson-Walker spacetimes, *Classical Quant. Grav.*, **30** (2013), 115007(1-13).

[45] SACHS, R.K. AND WU, H., *General Relativity for Mathematicians,* Grad. Text. in Math., **48**, Springer-Verlag, 1977.

[46] SACHS, R.K. AND WU, H., General Relativity and Cosmology, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **83** (1977), 1101–1164.

[47] SÁNCHEZ, M., Cauchy hypersurfaces and global Lorentzian geometry, *XIV Fall Workshop on Geometry and Physics, Publ. RSME,* **10** (2006), 143–163.

[48] SÁNCHEZ, M., Recent progress on the notion of global hyperbolicity, *Advances in Lorentzian geometry, Amer. Math. Soc.*, **49** (2011), 105–124.

[49] SNOW, C.P., *The Two Cultures,* 14th printing, Cambridge University Press, 2012.

[50] SMITH, J.H., *Introducción a la Relatividad Especial,* Ed. Reverté, 1978.

[51] WEIL, A., *The apprenticeship of a mathematician,* Basel Birkhäuser, 1992.

[52] WEIL, A., El último matemático universal, *Investigación y Ciencia, Temas*, **1**, Grandes matemáticos, (1995), 46–47.

[53] WEYL, H., *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Leipzig B.G. Teubner, 1913.

[54] YAGLOM, I.M., *A simple non-Euclidean Geometry and its Physical basis*, Springer-Verlag, New York, 1979.

CONTESTACIÓN DEL
ILMO. SR. D. MANUEL BARROS DÍAZ

Sr. Rector Magnífico
Excelentísimo Señor Presidente
Excelentísimos e Ilustrísimos Señores Académicos
Señoras y Señores

Es todo un honor dar cumplimiento al encargo que me hizo esta Academia así como un placer el manifestarles públicamente mi agradecimiento por ello. Tal encargo era, es, el de presentar al Prof. Alfonso Romero Sarabia en el solemne acto de su ingreso en ella como Académico de Número. Al mismo tiempo que contestar a su extraordinario discurso, que acaba de leer, para materializar dicho ingreso.

Como amante que soy de la ciencia y especialmente de la matemática, voy a fundamentar mi contestación en la prueba del siguiente teorema: El Prof. Alfonso Romero reúne unas condiciones excepcionales, que le hacen ser el prototipo ideal de un Académico de Número.

Antes de pasar a la prueba del teorema, es necesario entender bien el enunciado del mismo y para ello hay que precisar, al menos, un par de cuestiones. En primer lugar se debe entender lo que significa, en este contexto, la tesis de unas condiciones excepcionales. Pero además, se tendría que perfilar lo que, en mi opinión, es el prototipo ideal de Académico de Número.

Parece claro que todo Académico debe tener cualidades curriculares de excepción para ser tal. Cualidades que, desde un punto de vista formal, no sería difícil encontrar en una trayectoria como la del nuevo Académico. Como se verá en los créditos finales de este acto, de esta película, Alfonso Romero los tiene de sobra. Pero estas características académicas y científicas siendo necesarias para definir el perfil, no deberían ser suficientes. En mi opinión, un Académico tendría además que llevar su sabiduría y erudición hasta tal extremo que de manera natural le permitiese hablar de ciencia en diferentes contextos, relacionados o no con el mundo académico e intelectual. Debería poseer algún don especial que le posibilitara para hablar de ciencia en lenguaje paladino (término propuesto por el Doctor Eduardo Battaner y que con mucho gusto asumo).

Para probar la primera parte del teorema sería suficiente con analizar y valorar las características curriculares de Alfonso Romero, lo que proporcionaría una prueba rigurosa de la misma. Como ya se ha apuntado, esto se podría hacer de una manera formal y objetiva por cualquiera y de hecho se hará en los créditos finales. Mi aportación personal en este sentido será la de dar un poco de calor y emoción que contrasten con la frialdad de la lectura y el análisis de un curriculum.

Deseo entonces empezar contándoles a ustedes cómo era de estudiante Alfonso Romero. Recuerdo que pertenecía a una promoción excelente, de las mejores que he conocido en esta casa. Era una de las primeras (creo recordar que la segunda) del plan de 1973, el mejor plan de matemáticas que hemos tenido. Algunos de los componentes de dicha promoción formaron la primera hornada de excelentes matemáticos, el capital humano-científico necesario y justo para producir una matemática extraordinaria, original y profunda. De tal modo que desde entonces, la matemática que se produce en la Universidad de Granada ha alcanzado un nivel de excelencia internacional reconocida en los más importantes estudios comparativos entre Universidades.

El mencionado plan de estudios permitió, por primera vez en esta Universidad, estudiar Matemática Fundamental (Pura) y en el cuarto curso, una de las materias obligatorias era la dedicada a la Geometría Diferencial (en variedades). En dicha asignatura tuve la suerte de tener como estudiante a Alfonso Romero. Puesto que eran pocos los estudiantes, seguramente no llegarían a treinta, no me fue difícil conectar con Alfonso y darme cuenta de que era un estudiante que poseía unas condiciones excepcionales para la matemática, para la ciencia. No exagero cuando digo que nunca he conocido un estudiante con tales condiciones, que quisiera describir de manera muy breve. Le recuerdo como un estudiante muy talentoso y trabajador, era muy ingenioso, intuitivo y se interesaba por la motivación de los problemas a estudiar. Era el prototipo ideal del estudiante que todos nosotros deseamos tener. Muy pronto se interesó por mi asignatura y sus resultados durante aquel curso de 1977-78, fueron excelentes.

Una segunda etapa en la prueba del teorema es la de describir al Alfonso Romero estudiante de doctorado. Durante el curso 1978-79, en el que cursó el quinto curso de licenciatura, recuerdo que ya con muy buena química entre nosotros, le propuse estudiar, con el fin de escribir posteriormente una Tesina de Licenciatura, algunos problemas relacionados con el operador Laplaciano y su Espectro en el contexto de la Geometría de Riemann. El resultado fue magnífico y la Tesina de Alfonso ha sido ampliamente utilizada en bastantes Departamentos de distintas Universidades españolas por personas interesadas en el Espectro del Laplaciano. Hay que decir que la Tesina de Alfonso fue realizada prácticamente sin mi dirección pues a finales de 1978 y hasta finales del 1979 (cuando ya Alfonso había ingresado en el Departamento de Geometría y Topología, como Profesor Ayudante) yo lo pasé en la Universidad de Princeton. Posiblemente esta circunstancia fue positiva para Alfonso y lo creo desde dos puntos de vista:

(1) En primer lugar en el sentido obvio y directo que significó para él enfrentarse a un problema de gran dureza (lo que hubiera desanimado a muchos excelentes estudiantes) obsérvese que la comunicación entonces, entre España y Estados Unidos (y en general) era si la comparamos con la que hoy existe, toda una quimera. Para paliar sus momentos de desesperanza recurría a otros compañeros del Departamento y entonces creo que hasta organizaron un seminario informal sobre el tema.

(2) Además, durante mi estancia en Princeton me interesé por un campo que fue decisivo para la Tesis Doctoral de Alfonso. A mi vuelta, le propuse estudiar la Curvatura de las Variedades de

Kaehler dotadas de una Métrica Indefinida. El 17 de diciembre de 1982, Alfonso defendió su Tesis Doctoral. Los resultados de la misma están además publicados en cuatro excelentes revistas. Quiero destacar la materializada en el Math. Annalen por ser el artículo de mi curriculum con mayor número de citas y actualmente sigue citándose con cierta frecuencia.

Durante este tiempo en el que trabajé con Alfonso, siendo éste estudiante de doctorado, recuerdo que empezaron a aflorar en él las características que, desde mi punto de vista, son esenciales en la condición de matemático e imprescindibles en la de matemático excelente. Ya sabía que era muy Intuitivo y poseía una gran Motivación, eran y son cualidades naturales en él. Además descubrí que era Riguroso y Profundo hasta lo indescriptible y poseía una Actitud Crítica fuera de lo común. Es difícil encontrar matemáticos en los que Intuición y Rigor convivan de una manara tan natural como lo hacen en Alfonso Romero.

Para concluir la prueba, deseo describir al Doctor Alfonso Romero. Las condiciones que he considerado para describirlo en las dos anteriores etapas, siguen estando aumentadas y desarrolladas en el Doctor Romero pero falta decir que lo que faltaba describir es la cualidad que en cierto sentido constituye la guinda de su excelencia como Director de Investigación. Alfonso posee una Solidaridad Científica absolutamente excepcional. Solidaridad que le hace un excelente Maestro que ha ayudado y nunca ha defraudado a ninguna persona de las muchas que se han interesado por su trabajo y su obra. Su trabajo como Director de Investigación ha tenido, y sigue teniendo, una gran influencia en distintos grupos de diferentes Universidades tanto nacionales como extrajeras. Por si fuera poco y para concluir con la prueba, hay que decir que el Doctor Romero (como él mismo ha explicado al inicio de su excelente discurso) ha estado siempre preocupado por hacer llegar a todos los rincones, incluso a los que están fuera del ámbito científico y académico, su saber y erudición. Su labor paladina es amplia y extraordinaria como se verá en los créditos. (Fin de la prueba).

Quisiera a continuación leerles algunos corolarios y conclusiones que se podrían deducir del teorema anterior combinado con una lectura reposada del curriculum de Alfonso Romero.

(1) El Doctor Alfonso Romero nació para ser un científico, un matemático. Podría haberse dedicado a cualquier disciplina matemática, cualidades para ello no le faltaron, pero donde realmente ha sido, y es, feliz ha sido dedicándose a la Geometría, a la Geometría Diferencial, a la Geometría de Lorentz. Actualmente es uno de los mejores especialistas en Geometría de Lorentz de este país lo que es casi lo mismo que decir internacionalmente.

(2) Su manera de hacer matemática, geometría, es rigurosa y profunda pero motiva los problemas y realiza sus conclusiones con una buena dosis de intuición. Trabajar con Alfonso es todo un placer. Hablar con él de matemática, de geometría, de física y en general de ciencia es una experiencia muy enriquecedora. Hablando con Alfonso siempre se aprende.

(3) Su entusiasmo por la ciencia es contagioso. Los estudiantes de Alfonso son felices. Les motiva, les hace sentirse cercanos, les orienta de manera extraordinaria y les forma ampliamente. Su manera de hacer matemática es profundamente solidaria.

Siempre está dispuesto a ayudar tanto a estudiantes como a colegas. Colaborar con Alfonso es una apuesta segura, sabes que vas a aprender y también que te los vas a pasar muy bien.

(4) Si ustedes imaginan todas las condiciones científicas a las que me he referido y las incluyen en una persona, tendrán una idea muy aproximada de lo que es Alfonso como científico, como nuevo académico. Si a todo esto, le añadimos la cualidad de ser una grandísima persona y un amigo excelente entonces tienen ustedes una descripción casi exacta de Alfonso Romero como persona.

Deseo a continuación leerles a ustedes los principales créditos que han hecho posible, desde un punto de vista formal, el que hoy estemos aquí solemnizando el ingreso de Alfonso Romero como Académico de Número.

(1) Se doctoró en la Universidad de Granada, defendiendo su tesis doctoral el 17 de diciembre de 1982.

(2) Ha participado en multitud de proyectos tanto de los planes nacionales como autonómicos y europeos. En algunos de ellos ha sido investigador principal y coordinador.

(3) Posee aproximadamente setenta publicaciones científicas en revistas de reconocido prestigio y recogidas en el Journal Citation Reports con alto factor de impacto. Para que se hagan una idea, ha publicado en Math. Ann. Transactions AMS, Proc. AMS, Comment. Math. Helvetici, Math. Z., Math. Proc. Camb. Phil. Soc., Europhysics Letters, Class. Quantum Grav., etc.

(4) Ha sido conferenciante invitado y plenario en multitud

de congresos internacionales.

(5) Ha impartido conferencias en multitud de Universidades tanto nacionales como internacionales.

(6) Ha dirigido cuatro tesis doctorales y a varios estudiantes posdoctorales.

(7) Posee una amplia experiencia en organización de actividades I+D.

(8) Posee cinco tramos de investigación (todos los posibles) y seis tramos de docencia.

(9) Es colaborador de múltiples revistas científicas de reconocido prestigio.

(10) Ha sido codirector de la Gaceta de la RSME.

(11) Ha sido Editor General de la RSME.

(12) Evaluador de la National Research Foundation of Korea. Evaluador de la ANEP, ANECA (en diferentes programas) y de la FONDECIYT (Chile).

(13) Ha pronunciado una gran cantidad de conferencias de divulgación. Ha publicado otra gran cantidad de trabajos divulgativos y otras actividades de carácter docente.

(14) Su programa de movilidad es extenso.

Ilmos. Sres. Académicos, Señoras y Señores, me es imposible disimular la gran satisfacción que me produce el ingreso del Prof. Alfonso Romero Sarabia como Académico de Número en esta Academia. Además de por sus excepcionales cualidades tanto científicas y académicas como humanas, ya reseñadas, su ingreso en la Academia presenta, desde mi punto de vista, un nexo multidisciplinar entre varias de las disciplinas que tan ilustremente están representadas en la Academia. Su experiencia y sabiduría matemática y en particular sobre la Geometría de Lorentz serán sin lugar a dudas motivo de enriquecimiento para toda la Academia. Las soluciones y los tratamientos de muchos problemas de las ciencias experimentales se encuentran codificados en modelos geométricos. La aparición de, por ejemplo, la misma ecuación diferencial en distintos problemas de la física, problemas en contextos que a priori no tienen conexión entre si se debe sencillamente a la geometría subyacente, al fuerte carácter geométrico codificado en la ecuación. La necesidad de una nueva geometría, distinta a la geometría por excelencia, para modelar la Teoría de la Relatividad parecía obvia y la aparición de la Geometría de Lorentz fue todo un milagro de tal manera que actualmente es muy difícil señalar la frontera entre Relatividad y Geometría de Lorentz, entre relativistas y lorentzianos. La manera natural de unificar el electromagnetismo con la gravedad en un fibrado, por circunferencias, sobre el espacio tiempo, de manera que las ecuaciones de Einstein y las de Maxwell procedan de un mismo principio variacional, el correspondiente a las ecuaciones de Yang Mills para la correspondiente métrica de Kaluza-Klein, es de una belleza indescriptible. El Prof. Romero Sarabia es todo un experto en esta manera de ver y estudiar las interacciones entre distintas parcelas de la ciencia y la geometría subyacente. En mi opinión, su ingreso en la academia viene a ocupar un vacío histórico. A partir de ahora, estoy seguro de que nacerá, dentro de la Academia, una nueva forma de orientar las actividades de la misma con el añadido extra de usar un lenguaje paladino.

Prof. Romero Sarabia, Alfonso, en nombre de la Academia, de sus miembros y en el mío propio, te doy la bienvenida a la misma con mis más cordiales felicitaciones.